

О ДИСКРЕТНОСТИ СПЕКТРА ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ В ЗАДАЧЕ О КОЛЕБАНИЯХ В ОТКРЫТЫХ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРАХ¹

Аннотация.

Актуальность и цели. Цель работы – исследование свойств спектра резонансных частот в задаче о колебаниях объемных магнито-диэлектрических резонаторов.

Материалы и методы. Изучение проводится методом сведения задачи к анализу системы объемных интегродифференциальных уравнений по области неоднородности, определяющей оператор-функцию спектрального параметра.

Результаты. Доказана теорема о дискретности спектра резонансных частот в задаче о колебаниях в объемных резонаторах, представляющих собой ограниченные трехмерные анизотропные магнито-диэлектрические тела, функции диэлектрической и магнитной проницаемости которых являются кусочно-гладкими. Задача сведена к анализу системы объемных сингулярных интегральных уравнений, которая определяет голоморфную фредгольмову оператор-функцию спектрального параметра.

Выводы. Метод объемных интегродифференциальных уравнений является эффективным средством для анализа свойств задачи о колебаниях объемных магнито-диэлектрических резонаторов.

Ключевые слова: электромагнитные колебания, объемные резонаторы, уравнения Максвелла, анизотропные среды, объемные сингулярные интегральные уравнения.

М. А. Moskaleva, Yu. G. Smirnov

ON THE DISCRETENESS OF THE SPECTRUM OF INTEGRODIFFERENTIAL OPERATOR-FUNCTIONS IN THE PROBLEM OF OSCILLATIONS IN OPEN VOLUME RESONATORS

Abstract.

Background. The purpose of this work is to investigate the properties of the resonance frequency spectrum in the problem of oscillations of volumetric magneto-dielectric resonators.

Materials and methods. The study is carried out by reducing the problem to the analysis of the system of 3D integro-differential equations in the domain of heterogeneity that determines the operator-function of the spectral parameter.

¹ Исследование выполнено за счет гранта РФФИ (проект № 19-31-51004).

© Москалева М. А., Смирнов Ю. Г., 2020. Данная статья доступна по условиям всемирной лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), которая дает разрешение на неограниченное использование, копирование на любые носители при условии указания авторства, источника и ссылки на лицензию Creative Commons, а также изменений, если таковые имеют место.

Results. We prove the theorem on the discreteness of the resonance frequency spectrum in the problem of oscillations in volume resonators that are bounded 3D anisotropic magneto-dielectric bodies whose permittivity and permeability functions are piecewise smooth. The problem is reduced to the analysis of the system of volume singular integral equations that defines a holomorphic Fredholm operator-function of the spectral parameter.

Conclusions. The method of volume integro-differential equations is an effective tool for analyzing the properties of the problem of electromagnetic oscillations of volume magneto-dielectric resonators.

Keywords: electromagnetic oscillations, volume resonators, Maxwell's equations, anisotropic media, volume singular integral equations.

Введение

Методы определения резонансных частот электромагнитных колебаний в резонаторах имеют большое значение при их конструировании [1]. В открытых объемных магнитоэлектрических резонаторах могут существовать лишь комплексные резонансные частоты из-за излучения в свободное пространство [1, 2]. В статье рассматривается наиболее общая ситуация, когда среда в резонаторе является неоднородной и анизотропной, т.е. тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости являются произвольными кусочно-гладкими функциями координат.

Для доказательства существования резонансных частот и исследования их свойств задача для системы уравнений Максвелла сводится к анализу системы интегродифференциальных объемных сингулярных уравнений по области неоднородности. Оператор-функция, определяемая системой интегродифференциальных уравнений, оказывается голоморфной функцией спектрального параметра – частоты колебаний, а при некоторых естественных ограничениях – и фредгольмовой в выбранном пространстве.

Это дает возможность доказать дискретность спектра резонансных частот в задаче о колебаниях открытых резонаторов – основное теоретическое свойство этой задачи.

1. Постановка задачи

Пусть Q – ограниченная область в пространстве $\mathbf{R}^3$. Будем предполагать, что граница ∂Q области Q кусочно-гладкая.

Будем рассматривать следующий класс задач электродинамики. В области Q среда характеризуется тензорами диэлектрической и магнитной проницаемости $\hat{\epsilon}(x)$ и $\hat{\mu}(x)$ (матрицы-функции размерности 3×3), причем компоненты этих тензоров являются кусочно-дифференцируемыми функциями координат. Точнее, пусть область Q состоит из конечного числа подобластей Q_i с кусочно-гладкой границей ∂Q_i ; $\bar{Q} = \bigcup_i \bar{Q}_i$, $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ при

$i \neq j$. Предположим, что $\hat{\epsilon} \in C^3(\bar{Q}_i)$, $\hat{\mu} \in C^3(\bar{Q}_i)$ для всех i . Точнее, будем предполагать, что $\hat{\epsilon}(x)$ и $\hat{\mu}(x)$ являются сужениями на Q_i функций, заданных на более широком множестве, т.е. $\hat{\epsilon}(x) = \hat{\epsilon}_i(x)$, $\hat{\mu}(x) = \hat{\mu}_i(x)$ при

$x \in Q_i$, $\hat{\epsilon}_i \in C^3(\bar{B})$, $\hat{\mu}_i \in C^3(\bar{B})$, где B – (открытый) шар, содержащий Q , $\bar{Q} \subset B$. На ∂Q_i будем определять только предельные значения функций $\hat{\epsilon}(x)$ и $\hat{\mu}(x)$ с разных сторон в точках гладкости поверхности.

Вне области Q (в $\mathbf{R}^3 \setminus \bar{Q}$) среда изотропна с постоянными параметрами, $\epsilon = \epsilon_0$ и $\mu = \mu_0$. Требуется определить электромагнитные колебания с временной зависимостью в виде множителя $\exp(-i\omega t)$, где ω – круговая частота.

В такой постановке соответствующая математическая задача формулируется следующим образом: найти векторные непрерывно дифференцируемые в Q_i и вне $\bar{Q}$ функции электромагнитного поля, удовлетворяющие в областях гладкости параметров среды уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega \hat{\epsilon} \mathbf{E}, \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \hat{\mu} \mathbf{H} \quad (1)$$

и условию излучения на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} - ik_0 r u \right) = 0, \quad r := |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad (2)$$

где $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ ($\operatorname{Im} \epsilon_0 = 0$, $\operatorname{Im} \mu_0 = 0$, $\operatorname{Re} \epsilon_0 > 0$, $\operatorname{Re} \mu_0 > 0$); u – любая из декартовых компонент полей $\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$.

Далее на **гладких частях** поверхностей разрыва проницаемостей ∂Q_i функции $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ должны быть непрерывны вплоть до ∂Q_i (с каждой стороны) и удовлетворять условию непрерывности тангенциальных компонент полей:

$$[\mathbf{E}_\tau]_{\partial Q_i} = 0, [\mathbf{H}_\tau]_{\partial Q_i} = 0, \quad (3)$$

где $[\cdot]_{\partial Q_i}$ означает разность следов с разных сторон ∂Q_i . Здесь τ – касательный вектор к ∂Q_i . Мы не будем вводить новые обозначения именно для гладких частей ∂Q_i , а будем, в случае необходимости, оговаривать особо это обстоятельство.

Кроме того, поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ должны удовлетворять условию ограниченности энергии в любом конечном объеме пространства, т.е. условию

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_{2,loc}(\mathbf{R}^3). \quad (4)$$

Решения задачи (1)–(4) будем называть *классическими*.

2. Теоремы о фредгольмовости системы интегральных уравнений

Будем рассматривать задачи в анизотропной среде. Рассматриваемые задачи могут быть сведены к системе объемных сингулярных интегральных уравнений относительно электромагнитного поля в области Q [3–5]:

$$\mathbf{E}(x) + \frac{1}{3}(\hat{\epsilon}_r(x) - \hat{I})\mathbf{E}(x) - p.v. \int_Q \left((\hat{\epsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y), \operatorname{grad} \right) \operatorname{grad} G(R) dy -$$

$$\begin{aligned}
& -k_0^2 \int_Q (\hat{\epsilon}_r(y) - \hat{I}) \mathbf{E}(y) G(R) dy - \\
& -i\omega\mu_0 \int_Q (\hat{\mu}_r(y) - \hat{I}) \mathbf{H}(y) \times \text{grad } G(R) dy = 0, x \in Q,
\end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{H}(x) + \frac{1}{3}(\hat{\mu}_r(x) - \hat{I}) \mathbf{H}(x) - p.v. \int_Q ((\hat{\mu}_r(y) - \hat{I}) \mathbf{H}(y), \text{grad}) \text{grad } G(R) dy - \\
& -k_0^2 \int_Q (\hat{\mu}_r(y) - \hat{I}) \mathbf{H}(y) G(R) dy + \\
& +i\omega\epsilon_0 \int_Q (\hat{\epsilon}_r(y) - \hat{I}) \mathbf{E}(y) \times \text{grad } G(R) dy = 0, x \in Q,
\end{aligned} \quad (6)$$

где $\hat{\epsilon}_r = \hat{\epsilon} / \epsilon_0$, $\hat{\mu}_r = \hat{\mu} / \mu_0$; G – функция Грина (фундаментальное решение) для уравнения Гельмгольца

$$G(R) = \frac{\exp(i k_0 R)}{4\pi R}, \quad (7)$$

$R = |x - y|$; $x = (x_1, x_2, x_3)$; $y = (y_1, y_2, y_3)$, $\times$ – векторное произведение.

Ниже будем использовать гильбертово пространство шестимерных вектор-функций $\mathbf{L}_2(Q)$ со скалярным произведением, определяемым формулой

$$(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \int_Q \mathbf{U}(x) \mathbf{V}^*(x) dx.$$

Отметим, что оператор уравнений (5), (6) определен в $\mathbf{L}_2(Q)$ [4, 5].

Систему уравнений (5)–(6) можно записать в эквивалентной форме, в виде интегродифференциальных уравнений [4]:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}(x) - \text{grad div} \int_Q G(R)(\hat{\epsilon}_r(y) - \hat{I}) \mathbf{E}(y) dy - k_0^2 \int_Q G(R)(\hat{\epsilon}_r(y) - \hat{I}) \mathbf{E}(y) dy - \\
& -i\omega\mu_0 \text{rot} \int_Q G(R)(\hat{\mu}_r(y) - \hat{I}) \mathbf{H}(y) dy = 0, x \in Q,
\end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{H}(x) - \text{grad div} \int_Q G(R)(\hat{\mu}_r(y) - \hat{I}) \mathbf{H}(y) dy - k_0^2 \int_Q G(R)(\hat{\mu}_r(y) - \hat{I}) \mathbf{H}(y) dy + \\
& +i\omega\epsilon_0 \text{rot} \int_Q G(R)(\hat{\epsilon}_r(y) - \hat{I}) \mathbf{E}(y) dy = 0, x \in Q.
\end{aligned} \quad (9)$$

Выражения (8), (9) справедливы и при $x \in \mathbf{R}^3 \setminus \overline{Q}$. В этом случае они являются интегральными представлениями и определяют электромагнитное

поле вне области Q по найденному значению полей в Q . Отметим, что, поскольку $\hat{\epsilon}_r(x) = \hat{I}$, $\hat{\mu}_r(x) = \hat{I}$, $x \in \mathbf{R}^3 \setminus \bar{Q}$, то в этой области интегральные представления полей (8), (9) не будут иметь сингулярности. Электромагнитное поле вне Q определяется только значениями полей в Q с помощью интегральных представлений полей в $\mathbf{R}^3 \setminus \bar{Q}$, удовлетворяющих условию излучения.

Теперь рассмотрим вопрос о фредгольмовости интегральных уравнений. Дадим несколько определений, которые используются в дальнейшем изложении.

Определение 1. Пусть A – линейный ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H . Тогда оператор A^* , который также определен в H , называется сопряженным к A , если равенство $(Af, g) = (f, A^*g)$ выполняется для всех $f, g \in H$.

Решения однородного уравнения $Au = 0$ будем называть нулями оператора A . Обозначим размерность подпространства нулей через $n(A)$. Тогда $n(A^*)$ – размерность подпространства нулей сопряженного оператора A^* . Разность $\text{Ind } A = n(A) - n(A^*)$ называется индексом оператора A .

Определение 2. Линейный оператор A , действующий в гильбертовом пространстве H , называется фредгольмовым оператором, если значения $n(A)$ и $n(A^*)$ конечны и индекс равен нулю.

Сначала рассмотрим интегральное уравнение в анизотропной диэлектрической среде, т.е. магнитная проницаемость всюду в $\mathbf{R}^3$ постоянна и равна μ_0 . Тогда система интегральных уравнений (5), (6) сводится к объемному сингулярному интегральному уравнению относительно электрического поля в области Q :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) + \frac{1}{3}(\hat{\epsilon}_r(x) - \hat{I})\mathbf{E}(x) - p.v. \int_Q ((\hat{\epsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y), \text{grad}) \text{grad } G(R) dy - \\ k_0^2 \int_Q (\hat{\epsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y)G(R) dy = 0, \quad x \in Q, \quad \hat{\epsilon}_r = \hat{\epsilon} / \epsilon_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Обозначим через $\hat{B}_0$ оператор уравнения (10). Тогда

$$\begin{aligned} (\hat{B}_0 \mathbf{W})(x) = \left(\hat{I} + \frac{1}{3}\hat{\eta}(x) \right) \mathbf{W}(x) - \int_Q \hat{G}_0(x, y)(\hat{\eta}(y) \mathbf{W}(y)) dy - \\ - p.v. \int_Q \hat{G}_1(x, y)(\hat{\eta}(y) \mathbf{W}(y)) dy, \quad x \in Q, \end{aligned} \quad (11)$$

где тензор-функция $\hat{\eta}(x) = (\hat{\epsilon}_r(x) - \hat{I})$, а $\hat{G}_0(x, y)$ и $\hat{G}_1(x, y)$ – матричные функции очевидным образом определяемые из (10).

Рассмотрим оператор в пространстве L_2 вида

$$(\hat{A} \mathbf{W})(x) = \int_Q \hat{G}(x, y) \mathbf{W}(y) dy, \quad (12)$$

где $\hat{G}(x, y)$ – тензор-функция. Сопряженный оператор определяется формулой

$$(\hat{A}^* \mathbf{V})(x) = \int_Q \hat{G}^*(y, x) \mathbf{V}(y) dy, \quad (13)$$

где $\hat{G}^*$ – сопряженный к $\hat{G}$ тензор.

Тогда оператор, сопряженный к $\hat{B}_0$ в пространстве $L_2(Q)$, будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} (\hat{B}_0^* \mathbf{W})(x) = & \left(\hat{I} + \frac{1}{3} \hat{\eta}^*(x) \right) \mathbf{W}(x) - \hat{\eta}^*(x) \int_Q \hat{G}_0^*(y, x) \mathbf{W}(y) dy - \\ & - \hat{\eta}^*(x) p.v. \int_Q \hat{G}_1^*(y, x) \mathbf{W}(y) dy, \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (14)$$

Ниже будем полагать, что тензор-функция $\hat{\eta}(x) = (\hat{\epsilon}_r(x) - \hat{I})$ имеет обратную в каждой точке из $\bar{Q}$. Из (10), (11), (13) следует, что $\hat{G}_0(x, y) = \hat{G}_0(y, x)$, $\hat{G}_0 = \hat{G}_0^t$ и $\hat{G}_1 = \hat{G}_1^t$, $\hat{G}_1(x, y) = \hat{G}_1(y, x)$. Учитывая эти свойства тензоров, возьмем комплексное сопряжение от выражения (14):

$$\begin{aligned} (\hat{B}_0^* \mathbf{W})^*(x) = & \left(\hat{I} + \frac{1}{3} \hat{\eta}^t(x) \right) \mathbf{W}^*(x) - \hat{\eta}^t(x) \int_Q \hat{G}_0(x, y) \mathbf{W}^*(y) dy - \\ & - \hat{\eta}^t(x) p.v. \int_Q \hat{G}_1(x, y) \mathbf{W}^*(y) dy, \quad x \in Q, \end{aligned} \quad (15)$$

здесь символы t и $*$ обозначают транспонированный тензор и комплексно сопряженный вектор соответственно.

Пусть $\mathbf{W}$ – нуль оператора (14), т.е. $\hat{B}_0^* \mathbf{W} = 0$. Обозначим $\mathbf{V} = (\hat{\eta}^t)^{-1} \mathbf{W}^*$. Тогда, из (11), (14), (15) имеем

$$(\hat{B}_0^* \mathbf{W})^* = \hat{\eta}^t \hat{B}_0(\hat{\epsilon}^t) \mathbf{V} = 0,$$

где $\hat{B}_0(\hat{\epsilon}^t)$ – оператор уравнения (10) с тензором диэлектрической проницаемости в Q , равным $\hat{\epsilon}^t$. Значит, размерности подпространств нулей операторов $\hat{B}_0^*(\hat{\epsilon})$ и $\hat{B}_0(\hat{\epsilon}^t)$ связаны неравенством $n(\hat{B}_0^*(\hat{\epsilon})) \leq n(\hat{B}_0(\hat{\epsilon}^t))$. Теперь

пусть $\mathbf{W}$ – нуль оператора (11) с диэлектрической проницаемостью $\hat{\epsilon}^t$, т.е. $\hat{B}_0(\hat{\epsilon}^t)\mathbf{W} = 0$. Обозначим $\mathbf{V}^* = \hat{\eta}^t \mathbf{W}$. Тогда, из (11), (14), (15) имеем

$$\hat{\eta}^t \hat{B}_0(\hat{\epsilon}^t) \mathbf{W} = (\hat{B}_0^* \mathbf{W})^* = 0,$$

откуда следует, что $n(\hat{B}_0(\hat{\epsilon}^t)) \leq n(\hat{B}_0^*(\hat{\epsilon}))$. Значит,

$$n(\hat{B}_0(\hat{\epsilon}^t)) = n(\hat{B}_0^*(\hat{\epsilon})), \quad (16)$$

т.е. размерности подпространств нулей операторов $\hat{B}_0^*(\hat{\epsilon})$ и $\hat{B}_0(\hat{\epsilon}^t)$ равны. Если $\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}^t$, что выполняется, например, в изотропных средах, то $n(\hat{B}_0) = n(\hat{B}_0^*)$, и значит $\text{Ind}(\hat{B}_0) = 0$.

Если какой-либо эрмитов тензор $\hat{\delta}$ неотрицательно/положительно определен, то и эрмитов тензор $\hat{\delta}^t$ будет также неотрицательно/положительно определен. Поэтому при выполнении условий теоремы 2 получим

$$n(\hat{B}_0(\hat{\epsilon})) = n(\hat{B}_0(\hat{\epsilon}^t)) = 0. \quad (17)$$

Далее, из (16), (17) следует

$$n(\hat{B}_0(\hat{\epsilon})) = n(\hat{B}_0^*(\hat{\epsilon})) = 0. \quad (18)$$

Значит, при выполнении вышеприведенных условий оператор $\hat{B}_0$ будет фредгольмовым в пространстве $\mathbf{L}_2(Q)$. Таким образом, имеем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $\hat{\mu} = \mu_0$ в $\mathbf{R}^3$, и тензор-функция $(\hat{\epsilon}_r(x) - \hat{I})$ имеет обратную в каждой точке из $\bar{Q}$. Тогда оператор сингулярного интегрального уравнения (10) фредгольмов в пространстве $\mathbf{L}_2(Q)$.

Теперь рассмотрим задачи рассеяния на магнитоэлектрическом теле, диэлектрическая и магнитная проницаемости которого являются кусочно-дифференцируемыми функциями координат в Q , а поверхности разрыва параметров удовлетворяют вышеприведенным условиям.

Запишем систему сингулярных интегральных уравнений (5), (6) в символическом виде:

$$A(\omega) \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{S} & -i\omega\mu_0\hat{F} \\ i\omega\epsilon_0\hat{F} & \hat{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\hat{\epsilon}_r - \hat{I})\mathbf{E} \\ (\hat{\mu}_r - \hat{I})\mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где вид операторов $\hat{S}$ и $\hat{F}$ ясен из (5), (6). Очевидно, что оператор $\hat{S}$ является сингулярным оператором в $\mathbf{L}_2(Q)$, а оператор $\hat{F}$ компактным. Здесь $\mathbf{L}_2(Q)$ – гильбертово пространство интегрируемых с квадратом шестимерных вектор-функций.

Рассмотрим следующее уравнение в $\tilde{L}_2(Q)$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{S} & 0 \\ 0 & \hat{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\hat{\epsilon}_r - \hat{I})\mathbf{E} \\ (\hat{\mu}_r - \hat{I})\mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Поскольку система уравнений (20) распадается на два независимых уравнения вида (10), получаем по доказанному выше, что оператор уравнения (20) будет фредгольмовым в $L_2(Q)$. Оператор уравнения (19) отличается от оператора уравнения (20) прибавлением компактных операторов $\hat{F}$. Значит, оператор уравнения (19) также является фредгольмовым оператором в $L_2(Q)$. Получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть тензор-функции $(\hat{\epsilon}_r(x) - \hat{I})$ и $(\hat{\mu}_r(x) - \hat{I})$ имеют обратные в каждой точке из $\bar{Q}$. Тогда оператор системы сингулярных интегральных уравнений (5), (6) фредгольмов в пространстве $L_2(Q)$.

3. Теорема о дискретности спектра оператор-функции

Рассмотрим оператор-функцию $A(\omega): L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ как функцию комплексной переменной $\omega \in \mathbb{C}$.

Лемма 1. Оператор-функция $A(\omega): L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ является голоморфной на всей комплексной плоскости $\omega \in \mathbb{C}$.

Доказательство следует из того, что ядро (7) интегральных операторов $\hat{S}$ и $\hat{F}$ является аналитической функцией параметра ω .

Будем говорить, что в области Q выполнены условия C , если эрмитовы тензор-функции $(\hat{\epsilon}_i(x) + \hat{\epsilon}_i^*(x))/2$ и $(\hat{\mu}_i(x) + \hat{\mu}_i^*(x))/2$ положительно определены (аналог условия $\operatorname{Re} \epsilon_i(x) > 0, \operatorname{Re} \mu_i(x) > 0$ для изотропной среды), а тензор-функции $(\hat{\epsilon}_i(x) - \hat{\epsilon}_i^*(x))/(2i)$ и $(\hat{\mu}_i(x) - \hat{\mu}_i^*(x))/(2i)$ неотрицательно определены (аналог условия $\operatorname{Im} \epsilon_i(x), \operatorname{Im} \mu_i(x) \geq 0$ для изотропной среды). Символ «*» обозначает сопряженный тензор, т.е. транспонированный тензор с комплексно-сопряженными элементами.

При выполнении условий C при вещественных ω задача (19) имеет только тривиальное решение. В этом случае оператор-функция $A(\omega): L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ имеет непустое резольвентное множество. Получаем следующий основной результат.

Теорема 3. Пусть выполнены условия C и тензор-функции $(\hat{\epsilon}_r(x) - \hat{I})$ и $(\hat{\mu}_r(x) - \hat{I})$ имеют обратные в каждой точке из $\bar{Q}$. Тогда оператор-функция $A(\omega): L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ имеет дискретный спектр в $\mathbb{C}$, т.е. спектр этой оператор-функции является дискретным множеством изолированных характеристических чисел конечной алгебраической кратности.

Доказательство сразу следует из теоремы о голоморфной оператор-функции [6], леммы 1 и теоремы 2.

В открытых объемных магнито-диэлектрических резонаторах могут существовать только комплексные резонансные частоты из-за излучения в свободное пространство [1, 2]. Это значит, что вещественных положительных характеристических чисел у оператор-функции $A(\omega):L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ нет. Все комплексные резонансные частоты имеют отрицательную мнимую часть. Физическая интерпретация комплексных резонансных частот подробно изложена в [2].

Заключение

В статье рассмотрена задача об электромагнитных колебаниях магнито-диэлектрических объемных резонаторов в наиболее общей ситуации, когда среда в резонаторе является неоднородной и анизотропной, т.е. тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости являются произвольными кусочно-гладкими функциями координат.

Доказана дискретность спектра резонансных частот в задаче об электромагнитных колебаниях в открытых объемных резонаторах. Для исследования задача для системы уравнений Максвелла сведена к анализу системы интегродифференциальных объемных сингулярных уравнений по области неоднородности. Доказано, что оператор-функция, определяемая системой интегродифференциальных уравнений, является голоморфной функцией спектрального параметра – частоты колебаний, а при некоторых дополнительных условиях на тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости – фредгольмовой оператор-функцией в выбранном пространстве.

Библиографический список

1. Диэлектрические резонаторы / М. Е. Ильченко, В. Ф. Взятыхшев, Л. Г. Гассанов и др. – Москва : Радио и связь, 1989. – 326 с.
2. Санчес-Паленсия, Э. Неоднородные среды и теория колебаний / Э. Санчес-Паленсия. – Москва : Мир, 1984. – 472 с.
3. Самохин, А. Б. Объемные сингулярные интегральные уравнения для задач рассеяния на трехмерных диэлектрических структурах / А. Б. Самохин // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, № 9. – С. 1215–1230.
4. Самохин, А. Б. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии / А. Б. Самохин. – Москва : Радио и связь, 1998. – 161 с.
5. Смирнов, Ю. Г. Математическая теория дифракции акустических и электромагнитных волн на системе экранов и неоднородных тел / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак. – Москва : Русайнс, 2016. – 226 с.
6. Гохберг, И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. – Москва : Наука, 1965. – 448 с.

References

1. Il'chenko M. E., Vzyatyshev V. F., Gassanov L. G. et al. *Dielektricheskie rezonatory* [Dielectric resonators]. Moscow: Radio i svyaz', 1989, 326 p. [In Russian]
2. Sanches-Palensiya E. *Neodnorodnye sredy i teoriya kolebaniy* [Heterogeneous media and vibration theory]. Moscow: Mir, 1984, 472 p. [In Russian]
3. Samokhin A. B. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations]. 2014, vol. 50, no. 9, pp. 1215–1230. [In Russian]
4. Samokhin A. B. *Integral'nye uravneniya i iteratsionnye metody v elektro-magnitnom rasseyanii* [Integral equations and iterative methods in electromagnetic scattering]. Moscow: Radio i svyaz', 1998, 161 p. [In Russian]

5. Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. *Matematicheskaya teoriya difraktsii akusticheskikh i elektro-magnitnykh voln na sisteme ekranov i neodnorodnykh tel* [Mathematical theory of diffraction of acoustic and electromagnetic waves on a system of screens and heterogeneous bodies]. Moscow: Rusayns, 2016, 226 p. [In Russian]
6. Gokhberg I. Ts., Kreyn M. G. *Vvedenie v teoriyu lineynykh nesamosopryazhennykh operatorov v gil'bertovom prostranstve* [Introduction to the theory of linear nonself-adjoint operators in a Hilbert space]. Moscow: Nauka, 1965, 448 p. [In Russian]

Москалева Марина Александровна

кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40); исполнитель в проекте РФФИ, Научно-технологический университет «Сириус» (Россия, г. Сочи, Олимпийский проспект, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Moskaleva Marina Aleksandrovna

Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia); RFBR project contractor, “Sirius” University (40 Olimpiyskiy avenue, Sochi, Russia)

Смирнов Юрий Геннадьевич

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40); научный руководитель в проекте РФФИ, Научно-технологический университет «Сириус» (Россия, г. Сочи, Олимпийский проспект, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Smirnov Yuriy Gennad'evich

Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia); RFBR project research supervisor, “Sirius” University (40 Olimpiyskiy avenue, Sochi, Russia)

Образец цитирования:

Москалева, М. А. О дискретности спектра интегродифференциальной оператор-функции в задаче о колебаниях в открытых объемных резонаторах / М. А. Москалева, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 4 (56). – С. 22–31. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-4-2.